Vidensk. Selsk. Skr., 6te Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 7de Bd. 1.

Studier over nogle numeriske Funktioner.

Af

J. P. Gram.

Avec un résumé en français.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. VII. 1.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1890.

Pris: 1 Kr. 10 Øre.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

		Kr.	Øre
	I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1.	**Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	»	65.
2.	**Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3.	**Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4.	**Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	»
5.	**Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	»
6.	**Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	»	50.
7.	**Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35.
8.	**Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11.	**Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885	1.	85.
	II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2.	**Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30.
4.	**Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5.	**Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	»	60.
6.	**Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884	4.	»
7.	**Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	»	80.
8.	**Traustedt, M. P. A.** Spolia atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9.	**Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885 . . .	1	»
10.	—— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11.	**Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

Studier over nogle numeriske Funktioner.

Af

J. P. Gram.

Avec un résumé en français.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. VII. 1.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1890.

Theorien for de saakaldte numeriske Funktioner befinder sig endnu paa et primitivt Standpunkt. Det er kun meget faa af de der optrædende Problemer, man er i Stand til at løse fuldstændigt, og der savnes i høj Grad almindelige Methoder til deres Behandling. For efterhaanden at naa frem til saadanne almengyldige Methoder, er det paa det nuværende Standpunkt af Vigtighed, at man først bliver fuldstændig Herre over de simpleste af de nævnte Funktioner; derved erholder man ikke blot Kjendskab til specielle Funktioner, men man skaffer sig tillige et Materiale, som senere vil være af Betydning ved en mere systematisk Bearbejdelse af hele Theorien. Det er denne Betragtning, som har foranlediget mig til at henvende Opmærksomheden paa nogle af de simpleste i Taltheorien optrædende Funktioner, navnlig saadanne, som have Betydning for Læren om Primtallenes Fordeling. I det følgende skal der særlig behandles to saadanne Funktioner af rent elementær Karakter. Den første af disse, som jeg betegner ved N, er simpelthen Antallet af de Tal op til en vilkaarlig valgt Grænse, som alene ere sammensatte af Potenser af visse forud bestemte Primtal, altsaa f. Ex. Tal af Formen $2^x 3^y$. Den anden Funktion, som jeg betegner ved L, staar i nøje Forbindelse med hin, idet den kun adskiller sig fra N ved at nogle af Addenderne ere at tage med negative Fortegn. Ved Undersøgelsen gjøres der Brug af forskjellige elementære Sætninger om et Tals Divisorer, hvilke ere udviklede i første Afsnit.

I.

Lad n være et vilkaarligt helt Tal, som opløst i sine Primfaktorer kan skrives

$$n = 2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots .$$

Samtlige Divisorer i n ville da være Leddene i det udviklede Produkt

$$P = (1 + 2 + 2^2 + \ldots 2^\alpha)(1 + 3 + 3^2 + \ldots 3^\beta)(1 + 5 + \ldots 5^\gamma) \ldots .$$

Antallet af disse Divisorer vil aabenbart være

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots .$$

Betegnes en vilkaarlig Divisor ved d, saa vil ogsaa $\frac{n}{d}$ være en Divisor, som vil være forskjellig fra d, undtagen naar n er et Kvadrattal og $d = \sqrt{n}$. Heraf følger, at naar man opskriver samtlige Divisorer efter deres Størrelse, saa vil der for hver Divisor $< \sqrt{n}$ findes en tilsvarende $> \sqrt{n}$, og Antallet af Divisorer, som ere lig eller mindre end $\sqrt{n}$, vil altsaa være

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots,$$

undtagen naar n er et Kvadrattal, da selve $\sqrt{n}$ ogsaa bliver en Divisor, i hvilket Tilfælde Antallet bliver

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots + \tfrac{1}{2}.$$

Betegner man overhovedet Antallet af Divisorer i n op til Grænsen m (inklusive) ved $D_n(m)$, saa haves

$$D_n(m) + D_n\left(\frac{n}{m}\right) = \begin{cases} D_n(n) \\ D_n(n) + 1, \text{ hvis } m \text{ er Divisor i } n, \end{cases} \tag{1}$$

hvilket indses umiddelbart, naar man opskriver samtlige Divisorer i to Rækker under hinanden, den ene Gang efter voxende, den anden Gang efter aftagende Størrelse.

En anden simpel Relation faas ved i Produktet P at dele en af Faktorerne, f. Ex. den første, i to eller flere Dele saaledes:

$$(1 + 2 + \ldots 2^{\varkappa} + \ldots 2^{\alpha}) = (1 + 2 + \ldots 2^{\varkappa}) + 2^{\varkappa+1}(1 + 2 + \ldots 2^{\alpha-\varkappa-1}).$$

Betegnes Produktet af de øvrige Faktorer i P ved Q, saa faas alle Divisorerne som Led i de to Produkter

$$(1 + 2 + \ldots 2^{\varkappa})\, Q \quad \text{og} \quad (1 + 2 + \ldots 2^{\alpha-\varkappa-1})\, Q \,.\, 2^{\varkappa+1}.$$

De første ere Divisorerne i $2^{\varkappa} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} \ldots$, de sidste ere Divisorerne i $2^{\alpha-\varkappa-1} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} \ldots$, hver især multiplicerede med $2^{\varkappa+1}$. Søger man altsaa Antallet af Divisorer i n op til en vis Grænse $m < n$, saa kan man først søge Antallet af Divisorer i $2^{\varkappa} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} \ldots$ op til m og derefter Antallet af Divisorer i $2^{\alpha-\varkappa-1} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} \ldots$ op til $\frac{m}{2^{\varkappa+1}}$. Det er unødvendigt at opholde sig ved, hvorledes en yderligere Deling kan ske.

Disse elementære Reduktioner, som her umiddelbart frembyde sig, lade sig imidlertid ogsaa anvende i nogle andre Tilfælde.

Betegner man ved $\lambda(x)$ eller λ_x almindelig et Tal, som er -1 eller $+1$, eftersom det hele Tal x er sammensat af et ulige eller lige Antal Primfaktorer, saaledes at altsaa

$$\lambda(2^{\alpha} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} \ldots) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma \cdots},$$

saa bliver altid $\lambda(x) . \lambda(y) = \lambda(xy)$, altsaa ogsaa, naar d er Divisor i n,

$$\lambda(d)\, \lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \lambda(n),$$

eller da $(\lambda(d))^2 = +1$,

$$\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \lambda(n) . \lambda(d).$$

Betegnes nu ved $A_n(m)$ Summen af de λ, der svare til alle de Divisorer i n, som ere lig eller mindre end m, saa faas, naar m ikke er Divisor i n,

$$A_n(m) + \lambda(n) \,.\, A_n\left(\frac{n}{m}\right) = A_n(n) \,. \tag{2}$$

Er derimod m Divisor i n, saa bliver

$$A_n(m) + \lambda(n) A_n\left(\frac{n}{m}\right) = A_n(n) + \lambda(m) \,. \tag{2'}$$

For selve $A_n(n)$ faas strax et simpelt Udtryk ved i (2) at danne Produktet analogt med P:

$$P' = (1 - 1 + 1 \ldots + (-1)^\alpha) \,.\, (1 - 1 \ldots + (-1)^\beta) \,.\, (1 - 1 \ldots + (-1)^\gamma) \ldots ,$$

hvilket Produkt, naar Multiplikationen udføres Led for Led, netop vil give Summen af alle λ, svarende til Divisorerne i n. Men hver enkelt Faktor i P' forsvinder, naar ikke Antallet af dens Led er ulige, altsaa den sidste Exponent lige, i hvilket Fald den reduceres til 1. Heraf følger, at

$$A_n(n) = 0 \,, \quad \text{undtagen naar } n \text{ er et Kvadrattal,}$$
$$A_n(n) = 1 \,, \quad \text{naar } n \text{ er et Kvadrattal.}$$

Almindelig kan man skrive

$$A_n(n) = \frac{(1 + (-1)^\alpha)}{2} \frac{(1 + (-1)^\beta)}{2} \frac{(1 + (-1)^\gamma)}{2} \ldots \,. \tag{3}$$

Af (2) og (2′) faas

$$A_n(\sqrt{n}) \, (1 + \lambda(n)) = A_n(n) \,, \tag{4}$$

undtagen naar n er et Kvadrattal; da

$$A_n(\sqrt{n}) = \tfrac{1}{2}\left(A_n(n) + \lambda(\sqrt{n})\right) . \tag{4'}$$

(4′) bestemmer altid $A_n(\sqrt{n})$, medens (4) kun gjør det, naar $\lambda(n)$ er $+1$; for $\lambda(n) = -1$ viser Ligningen (4) kun, at $A_n(n) = 0$, som før fundet, medens $\lambda(n) = +1$ giver $A_n(\sqrt{n}) = 0$.

Lignende Betragtninger kunne anstilles over Tallene $\mu(x)$, som kun adskille sig fra $\lambda(x)$ ved at være 0, naar x indeholder en kvadratisk Faktor, for disse haves som bekjendt altid $\Sigma\mu(d) = 0$, naar Summationen udstrækkes til alle Divisorer i Tallet n, og $n > 1$. For at kunne anvende den samme Fremgangsmaade som før, maatte man dog her antage Exponenterne α, β, $\gamma \ldots = 1$ (eller 0).

Mere Udbytte har man af at danne symmetriske Funktioner, hvori indgaa Logarithmer af Divisorerne i n. Opskriver man f. Ex. Rækkerne — idet vi her som oftere i det følgende exempelvis antage n sammensat af tilstrækkelig høje Potenser af de første Primtal —

$$\Sigma ld = l\,.\,1 + l\,.\,2 + l\,.\,3 + l\,.\,4 + l\,.\,5 + \ldots + l\frac{n}{2} + ln$$

$$\Sigma ld = l\frac{n}{1} + l\frac{n}{2} + l\frac{n}{3} + l\frac{n}{4} + l\frac{n}{5} + \ldots + l\,.\,2 + l\,.\,1 \,,$$

saa ses først, at

$$2\,\Sigma ld = D_n(n) \,.\, ln \,,$$

og dernæst ved at overskjære Rækkerne paa et vilkaarligt Sted og kombinere første Del af den øverste med sidste Del af den nederste

$$\sum_1^m ld - \sum_1^{\frac{n}{m}} ld + D_n\left(\frac{n}{m}\right) ln = \Sigma ld = \tfrac{1}{2} D_n(n)\, ln\,,$$

hvoraf

$$\sum_1^m ld - \sum_1^{\frac{n}{m}} ld = \tfrac{1}{2}\left(D_n(m) - D_n\left(\frac{n}{m}\right)\right) ln\,, \tag{5}$$

forudsat at m ikke er Divisor. Gaar m op i n, maa der paa venstre Side fradrages lm, paa højre Side $\frac{1}{2}\, ln$. Analoge Resultater faas for Funktionen $\Sigma\lambda(d)\, ld$, idet

$$(1 + \lambda_n) \sum_1^n \lambda(d)\, ld = A_n(n)\, ln \tag{6}$$

tjener til Bestemmelse af Summen $\sum\limits_1^n \lambda(d) ld$, naar $\lambda_n = +1$ og,

$$\sum_1^m \lambda(d)\, ld - \lambda_n \sum_1^{\frac{n}{m}} \lambda(d)\, ld = \frac{A(m) - A\left(\frac{n}{m}\right)}{1 + \lambda_n}\, ln\,, \tag{7}$$

naar m ikke er Divisor i n.

Det fortjener at fremhæves, at man ogsaa faar simple Udtryk for symmetriske Funktioner af Formen $\Sigma\mu(d)(ld)^s$ udstrakt til alle Divisorer i n. Da $\mu(d)$ er 0, naar d indeholder en kvadratisk Faktor, har man først at betragte saadanne n, som have Formen $a\,.\,b\,.\,c\ldots$, hvor a, b, $c\ldots$ ere forskjellige Primtal. Divisorerne Gange μ blive da Led i Produktet $(1-a)\;(1-b)\;(1-c)\ldots$.

Sætte vi altsaa

$$(1 - a^x)\;(1 - b^x)\;(1 - c^x)\ldots = P = \Sigma\mu(d)\,.\,d^x\,,$$

saa kunne vi paa begge Sider udvikle efter Potenser af x, hvorved paa højre Side faas

$$P = \Sigma\mu(d) + \frac{x}{1}\Sigma\mu(d)\, ld + \frac{x^2}{1\,.\,2}\Sigma\mu(d)(ld)^2 + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\Sigma\mu(d)(ld)^3 + \ldots\,.$$

Paa den anden Side faas et Produkt af Rækker af Formen

$$x\,la + \frac{x^2}{1\,.\,2}(la)^2 + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}(la)^3 + \ldots\,,$$

tagne med negative Fortegn.

Heraf ses strax ved Sammenligning af Koefficienterne til de forskjellige Potenser af x, at den første Koefficient, der ikke bliver Nul, er den, som svarer til den Potens af x, hvis Exponent angiver Antallet af forskjellige Primfaktorer i n. Er dette Antal t, saa er altsaa

og

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\mu(d)(ld)^s &= 0 \quad \text{for} \quad s < t\,, \\ \Sigma\mu(d)(ld)^t &= \mu(n)\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,..\,t\,.\,la\,.\,lb\,.\,lc\ldots\,, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

For $s > t$ blive Udtrykkene mere sammensatte og faa kun nogen Værdi for specielle Tilfælde, exempelvis skal blot anføres

$$\Sigma\mu(d)(ld)^{t+1} = (-1)^t \cdot \frac{1.2..(t+1)}{1.2} la . lb . lc \dots (la + lb + lc \dots) , \tag{9}$$

$$\Sigma\mu(d)(ld)^{t+2} = (-1)^t . 1.2..(t+2) . la . lb . lc \dots \left(\Sigma\frac{la . lb}{1.2} + \Sigma\frac{(la)^2}{1.2.3}\right). \tag{10}$$

Disse Resultater kunne umiddelbart overføres paa Tal, som indeholde højere Potenser af de enkelte Primfaktorer, og navnlig bemærkes, at for et Tal, som er sammensat af t Potenser af forskjellige Primtal, er altid

$$\left.\begin{array}{ll} & \Sigma\mu(d)(ld)^t = (-1)^t . 1.2 \dots t . la . lb . lc \dots , \\ \text{men} & \Sigma\mu(d)(ld)^s = 0, \quad \text{for } s < t, \quad s \text{ positiv hel} , \end{array}\right\} \tag{11}$$

et Resultat, vi senere faa Anvendelse for.

II.

Ved Hjælp af de foregaaende Sætninger ville vi nu søge at bestemme Antallet af Tal op til en vilkaarlig valgt Grænse, som ere sammensatte af Potenser af visse bestemte opgivne Primtal. Som Repræsentanter for disse vælge vi de første i Talrækken, altsaa 2, 3, 5 o. s. v. Det vil umiddelbart indses, at de uden videre kunne ombyttes med andre i de efterfølgende Formler. De Tal, vi betragte, ere altsaa af Formen $2^a 3^b 5^c \dots$, hvor nogle af Exponenterne kunne være 0; de ere allesammen Divisorer i et Tal p af samme Form, hvis Exponenter ere valgte tilstrækkelig høje. Antallet af saadanne Tal op til Grænsen n — denne inklusive — betegne vi ved $N(n)$, eller hvor der er Grund til at fremhæve Primfaktorerne, som indgaa i dem, ved $N_{2, 3, 5 \dots}(n)$.

Samtlige Tal af den givne Art, vi betegne dem ved x, ere altsaa indbefattede i dem, vi faa ved at multiplicere de uendelige Rækker:

$$\begin{aligned} R_2 &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots , \\ R_3 &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots , \\ R_5 &= 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots \text{ o.s.v.} \end{aligned}$$

Da der ikke er Tale om nogen virkelig Summation men kun om Betragtning af de enkelte Led, behøves der naturligvis ikke at tages Hensyn til, at deres Sum er uendelig.

Hvis man vilde afbryde disse Rækker paa vilkaarlige Steder og altsaa f. Ex. danne Produktet

$$P = (1 + 2 + ..2^\alpha)(1 + 3 + ..3^\beta)(1 + 5 + ..5^\gamma) \dots ,$$

saa kunde dette skrives som

$$(R_2 - 2^{\alpha+1} R_2)\ (R_3 - 3^{\beta+1} R_3)\ (R_5 - 5^{\gamma+1} R_5) \ldots ,$$

eller

$$R_2 R_3 R_5 \ldots (1 - 2^{\alpha+1} - 3^{\beta+1} - 5^{\gamma+1} \ldots + 2^{\alpha+1} 3^{\beta+1} \ldots - 2^{\alpha+1} 3^{\beta+1} 5^{\gamma+1} \ldots).$$

Men Leddene i Produktet P ere Divisorerne i $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$, og vi se altsaa, hvorledes disse kunne udtrykkes ved selve Tallene x og disse multiplicerede med $2^{\alpha+1}$, $3^{\beta+1}$, $5^{\gamma+1}$ og Produkter af dem. Da nu Antallet af Tal af Formen $2^{\alpha+1} . x$ op til Grænsen n er det samme som Antallet af Tal x op til $\frac{n}{2^{\alpha+1}}$, saa ses, at Antallet af Divisorer i $p = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$ op til n udtrykkes ved

$$D_p(n) = N(n) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) - N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - N\left(\frac{n}{5^{\gamma+1}}\right) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right) \ldots - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}5^{\gamma+1}}\right) \ldots \quad (12)$$

Er specielt $\alpha = \beta = \gamma \ldots = 0$, faas

$$1 = N(n) - N\left(\frac{n}{2}\right) - N\left(\frac{n}{3}\right) - N\left(\frac{n}{5}\right) \ldots + N\left(\frac{n}{2.3}\right) + N\left(\frac{n}{3.5}\right) \ldots - N\left(\frac{n}{2.3.5}\right) \ldots , \quad (13)$$

hvilken Ligning kan betragtes som Definition af N, idet N kun varierer med en Enhed, hver Gang n passerer et Tal x, og der i Nævnerne kun indgaa de til disse Tal hørende Primfaktorer.

Ligningen kan i forkortet Form skrives

$$1 = N\left(\frac{n}{1}\right) - \Sigma N\left(\frac{n}{a}\right) + \Sigma N\left(\frac{n}{ab}\right) - \Sigma N\left(\frac{n}{abc}\right) + \Sigma N\left(\frac{n}{abcd}\right) - \ldots , \quad (13')$$

hvor a, b, c, $d \ldots$ antyde de forskjellige i Talrækken x indgaaende Primfaktorer, og hver af Summerne udstrækkes til alle de af dem dannede Produkter af henholdsvis 1, 2, 3, 4... Faktorer.

Antages særlig, at a, b, c ere alle Primtal, da bliver $N(n) = n$, $N\left(\frac{n}{x}\right) = E\frac{n}{x} =$ det hele Tal i Kvotienten $\frac{n}{x}$, og man faar foruden den bekjendte Ligning $\Sigma \mu_x E\frac{n}{x} = 1$, at

$$D(n) = E\frac{n}{1} - E\frac{n}{2^{\alpha+1}} - E\frac{n}{3^{\beta+1}} \ldots + E\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}} + E\frac{n}{2^{\alpha+1}5^{\gamma+1}} \ldots - E\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}5^{\gamma+1}} + \ldots , \quad (14)$$

fremstiller Antallet af de Divisorer i $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$, som ere lig eller mindre end n.

F. Ex.

$$E\frac{20}{1} - E\frac{20}{5} - E\frac{20}{7} - E\frac{20}{8} - E\frac{20}{9} - E\frac{20}{11} - E\frac{20}{13} - E\frac{20}{17} - E\frac{20}{19} = 6 ,$$

hvor de i Nævnerne forekommende Potenser af 2 er 2^3 og af 3 er 3^2, betegner Antallet af de Divisorer i $2^2 . 3 = 12$, som ere < 20, men dette Antal er netop 6.

Sætningen (14) indbefatter den bekjendte Formel for $\theta(n) - \theta(\sqrt{n})$, hvor θ er Antallet af Primtal op til n; den viser tillige, naar α, β, γ vælges saa store, at Potenser af alle Primtallene op til $\sqrt{n}$ udgaa af Nævnerne, at

$$n - \sum_{\sqrt{n}}^{n} E\frac{n}{\tilde{\omega}} = Q(n), \tag{15}$$

hvor Q betegner Antallet af Tal op til n, som alene indeholde Primfaktorer $\overline{\lt} \sqrt{n}$, og $\tilde{\omega}$ betegner Primtallene $> \sqrt{n}$.

Formlen (12) giver en Reduktionsformel, ved Hjælp af hvilken $N(n)$ sukcessive kan beregnes, idet man for $p = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$ vælger et saadant Tal, at $D_p(n)$ kan bestemmes. Dette vil altid være Tilfældet, naar p vælges $\leq n$, idet da $D(n) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$, men endnu bedre er det, naar man kan vælge et saadant Tal for p, at der mellem $\sqrt{p}$ og n ikke ligger noget Tal af Formen x, idet dog $n > \sqrt{p}$. Saa kan nemlig ogsaa ifølge det foregaaende $D(n)$ findes exakt, medens samtidig Argumenterne $\dfrac{n}{2^{\alpha+1}}$ o. s. v. blive forholdsvis mindre og Beregningen altsaa lettes betydelig.

I visse Tilfælde kan man have Fordel af at udtrykke N direkte ved D ved en Omvending af Formlen (12), hvorved faas

$$N(n) = D_p(n) + D_p\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + D_p\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) + \ldots = \Sigma D_p\left(\frac{n}{y}\right), \tag{16}$$

hvor y betegner alle de Tal, som ere sammensatte af Tallene $2^{\alpha+1}$, $3^{\alpha+1}\ldots$ og Produkter af Potenser af disse, medens D overalt betegner Antallet af Divisorer i $p = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$ op til den ved Argumentet angivne Grænse.

Beregningen bliver alligevel besværlig, naar der i p indgaar mange forskjellige Primtal. Derimod føre Formlerne til smukke Resultater, naar disses Antal er ringe.

Ved det simpleste Tilfælde, hvor x'erne kun indeholde en enkelt Primfaktor, f. Ex. 2, er der ingen Grund til at dvæle; man har da simpelthen

$$N_2(n) = E\frac{ln}{l2} + 1, \tag{17}$$

som tillige vil fremstille Værdien af Rækken

$$E\frac{n}{1} - E\frac{n}{3} - E\frac{n}{5} - E\frac{n}{7} - E\frac{n}{11} - E\frac{n}{13} + E\frac{n}{15}\cdots,$$

dannet i Analogi med Rækken $\Sigma \mu_x E\dfrac{n}{x}$, blot at de Nævnere, som indeholde Faktoren 2, ere borte.

Naar derimod x'erne indeholde 2 Primfaktorer, f. Ex. 2 og 3, saa er altsaa $p = 2^\alpha 3^\beta$. Vi antage, at n ikke har samme Form, og vælge da

$$\alpha = E\frac{ln}{l2}, \quad \beta = E\frac{ln}{l3},$$

hvorved $2^{\alpha+1} > n > 2^\alpha$, $3^{\beta+1} > n > 3^\beta$, saa at $N_{2\,3}(n) = D_p(n)$, $p = 2^\alpha 3^\beta$.

Men nu er

$$\left.\begin{aligned} N_{2\,3}\left(\sqrt{2^\alpha 3^\beta}\right) &= \tfrac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)+\begin{cases}0\\ \tfrac{1}{2}\end{cases} = E\,\tfrac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)+1\,, \\ N_{2\,3}\left(\sqrt{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right) &= \tfrac{1}{2}(\alpha+2)(\beta+2)+\begin{cases}0\\ \tfrac{1}{2}\end{cases} = E\,\tfrac{1}{2}(\alpha+2)(\beta+2)+1\,,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

og mellem disse Værdier maa derfor $N(n)$ være beliggende. Forskjellen imellem dem er

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+3)+\begin{cases}\tfrac{1}{2} \text{ for } \alpha \text{ og } \beta \text{ begge ulige,}\\ 0 \text{ for } \alpha+\beta \text{ ulige,}\\ -\tfrac{1}{2} \text{ for } \alpha \text{ og } \beta \text{ begge lige.}\end{cases}$$

Lidt snævrere Grænser kunne faas ved at sammenligne n med $2^\alpha 3^{\beta+1}$ og $2^{\alpha+1}3^\beta$ foruden de to før anførte Tal. Exakt findes $N(n)$, naar n er lig $\sqrt{p}$.

Man ser, at der altid faas en kontinuert Tilnærmelsesformel ved at sætte for $N(n)$

$$N'(n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{l2n}{l2}\cdot\frac{l3n}{l3}+\frac{1}{2}, \tag{19}$$

hvilken Størrelse stedse vil ligge imellem de samme Grænser som før ere angivne for $N(n)$, saaledes at man kan sætte

$$N(n) = N'(n)\pm\tfrac{1}{2}k\left(\frac{l2n}{l2}+\frac{l3n}{l3}\right), \qquad 0<k<1. \tag{20}$$

Den numeriske Funktion $N_{2\,3}(n)$ tilfredsstiller for $n \overline{\gtrless} 1$ Fundamentalligningen

$$F(n)-F\left(\frac{n}{2}\right)-F\left(\frac{n}{3}\right)+F\left(\frac{n}{6}\right) = 1. \tag{21}$$

Den samme tilfredsstilles af den kontinuerte Funktion $N'(n)$, idet nemlig ifølge (11), naar d betegner Divisorerne i $2\,.\,3$

$$\Sigma\mu(d)\left(l\,.\frac{n}{d}\right)^2 = \Sigma\mu(d)\left((ln)^2-2\,ln\,.\,ld+(ld)^2\right) = 1\,.\,2\,.\,l2\,l3\,,$$

medens

$$\Sigma\mu(d)\,l\frac{n}{d} = 0 = \Sigma\mu(d).$$

Fundamentalligningen vil derfor tilfredsstilles af enhver kontinuert Funktion af Formen

$$F(n) = \frac{1}{2}\frac{(ln)^2}{l2\,l3}+A_1\frac{ln}{l2}+A_2\frac{ln}{l3}+B\,,$$

altsaa ogsaa af Funktionen $N'(n)$, hvori $A_1 = A_2 = \tfrac{1}{2}$, $B = 1$, hvorved Grænsen for Afvigelsen fra $N(n)$ bliver meget nær

$$\pm\frac{1}{2}\,ln\,.\left(\frac{1}{l2}+\frac{1}{l3}\right) = \pm\frac{1}{2}\frac{ln\,.\,l6}{l2\,.\,l3},$$

men den virkelige Fejlgrænse synes at være adskilligt mindre.

Af Ligningen

$$F(n)-F\left(\frac{n}{2}\right)-F\left(\frac{n}{3}\right)+F\left(\frac{n}{6}\right) = 1\,,$$

kan man ved sukcessive at sætte $\frac{n}{2}, \frac{n}{4} \ldots, \frac{n}{3}, \frac{n}{9}$ o.s.v. for n finde den almindelige Ligning

$$F(n) - F\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) - F\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) + F\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right) = (\alpha+1)(\beta+1), \tag{22}$$

men der er herved at mærke, at medens Ligningen da tilfredsstilles af $N'(n)$ for alle positive hele α og β, saa vil den derimod, naar $F(n)$ kun kan variere med Spring af en Enhed, kun gjælde saalænge $2^\alpha . 3^\beta \overline{\gtrless} n$, idet den afledede Ligning

$$F\left(\frac{n}{2}\right) - F\left(\frac{n}{4}\right) - F\left(\frac{n}{6}\right) + F\left(\frac{n}{12}\right) = 1,$$

kun gjælder for $n \overline{\gtrless} 2$, hvis $F(n)$ skal fremstille Antallet af Tal af Formen $2^x 3^y$. Dette er en simpel Følge af, at (21) ikke tilfredsstilles af $N(n)$, naar $n < 1$, idet nemlig $N(n)$ da er lig 0.

Sætte vi $n = 2^{\alpha+1} . 3^{\beta+1}$, faas i begge Tilfælde

$$F(2^{\alpha+1} . 3^{\beta+1}) - F(2^{\alpha+1}) - F(3^{\beta+1}) + 1 = (\alpha+1)(\beta+1),$$

eller

$$F(2^\alpha 3^\beta) = F(2^\alpha) + F(3^\beta) + \alpha\beta - 1. \tag{23}$$

Heraf ses, at Værdierne af alle de F, som svare til Tal af Formen $2^x 3^y$, findes, naar man først har fundet de Værdier, som svare til dem, der alene ere Potenser af 2 eller 3.

Derved faas altsaa en meget simpel Bestemmelse af N og N', naar først de Værdier, som svare til Potenstallene ere bekjendte. Men disse kunne uden Vanskelighed findes. Tænker man sig nemlig Potenserne af 2 og 3 opskrevne i Rækkefølge efter deres Størrelse, altsaa 1, 2, 3, 4, 8, 9, 16, 27 . . ., og vælger to sukcessive Potenser af 2 og 3, f. Ex. 2^α og 3^β, saa vil for $n = 2^\alpha . 3^\beta$ haves

$$D_n(2^\alpha) + D_n(3^\beta) = D_n(n) + 1.$$

Men venstre Side kan her erstattes ved $N(2^\alpha) + N(3^\beta)$, medens højre Side bliver

$$(\alpha+1)(\beta+1) + 1,$$

saa at

$$N(2^\alpha) + N(3^\beta) = (\alpha+1)(\beta+1) + 1, \tag{24}$$

under Forudsætning af, at 2^α og 3^β ere sukcessive Potenser.

Ad denne Vej kan faas et System af Ligninger, hvoraf $N(2^\alpha)$ og $N(3^\beta)$ efterhaanden kunne bestemmes med Lethed.

Hvis man i Stedet for to sukcessive Potenser for 2^α og 3^β valgte andre vilkaarlige, saa vilde man ikke længere nødvendigvis have $N(2^\alpha) = D(2^\alpha)$ og $N(3^\beta) = D(3^\beta)$. Er nemlig $2^\alpha > 3^\beta$, saa kunde $N(2^\alpha)$ foruden $D(2^\alpha)$ endnu indeholde Addender, som svarede til de Tal af Formen $2^x 3^y$, der indeholde $3^{\beta+1}$ og højere Potenser og altsaa ikke kunne være Divisorer i $2^\alpha 3^\beta$. Man maatte altsaa for at faa $N(2^\alpha)$ supplere $D(2^\alpha)$ med et Led af Formen $N\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right)$. Og omvendt, hvis $3^\beta > 2^\alpha$. I alle Tilfælde kan man derfor sætte

$$N(2^\alpha) + N(3^\beta) = D_n(2^\alpha) + D_n(3^\beta) + N\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) + N\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right),$$

idet $n = 2^\alpha 3^\beta$ og enten det sidste eller det næstsidste Led paa højre Side altid vil forsvinde. Heraf faas altsaa den til (24) svarende udvidede Formel

$$N(2^\alpha) + N(3^\beta) = (\alpha + 1)(\beta + 1) + 1 + N\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) + N\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right), \tag{24'}$$

og ligeledes af (23)

$$N(2^\alpha 3^\beta) = 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 + N\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) + N\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right). \tag{25}$$

Denne Formel giver en let Bestemmelse af $N(2^\alpha 3^\beta)$, naar 2^α og 3^β ikke afvige meget fra hinanden, derimod er den ikke praktisk, naar en af Exponenterne er 0.

Der er imidlertid en anden Fremgangsmaade, som da hurtigere fører til Maalet og som bedre lader sig anvende ogsaa for andre Primtal end 2 og 3.

Sætte vi nemlig

$$F(n) - F\left(\frac{n}{2}\right) = f(n),$$

saa faas af (21)

$$f(n) - f\left(\frac{n}{3}\right) = 1,$$

og heraf almindelig

$$f(n) - f\left(\frac{n}{3^\beta}\right) = \beta,$$

som gjælder baade for kontinuerte og diskontinuerte Funktioner, forsaavidt $n > 3^{\beta-1}$.

Sætte vi altsaa

$$\beta = E\frac{ln}{l3} + 1,$$

faas dels

$$N(n) - N\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + E\frac{ln}{l3} = E\frac{l3n}{l3},$$

dels

$$N'(n) - N'\left(\frac{n}{2}\right) = E\frac{l3n}{l3} + f\left(\frac{n}{3^\beta}\right),$$

hvor nu almindelig

$$f(m) = N'(m) - N'\left(\frac{m}{2}\right).$$

$N(2^x)$ faas nu direkte ved Summation af Udtryk af Formen

$$N(2^x) - N(2^{x-1}) = 1 + E\frac{x\,l2}{l3},$$

altsaa

$$N(2^x) = x + 1 + \left(E\frac{l2}{l3} + E\frac{2\,l2}{l3} + \ldots E\frac{x\,l2}{l3}\right).$$

Ligesaa findes

$$N(3^y) = y + 1 + \left(E\frac{l3}{l2} + E\frac{2\,l3}{l2} + \ldots E\frac{y\,l3}{l2}\right).$$

I Praxis udføres Beregningen med største Lethed, naar man først opskriver alle Potenser af 2 og 3 i Rækkefølge efter deres Størrelse. $N(2^x)$ faas da ved til $N(2^{x-1})$ at addere Exponenten til den efter 2^x nærmest følgende Potens af 3, saaledes som vist i efterstaaende Skema:

Potenser.	$N(2^x) - N(2^{x-1})$.	$N(2^x)$.	$N(3^y) - N(3^{y-1})$.	$N(3^y)$.
1	1	1	1	1
2^1	1	2	-	-
3^1	-	-	2	3
2^2	2	4	-	-
2^3	2	6	-	-
3^2	-	-	4	7
2^4	3	9	-	-
3^3	-	-	5	12
2^5	4	13	-	-
2^6	4	17	-	-
3^4	-	-	7	19

Følgende Tabel gjengiver Resultaterne i en mere overskuelig Form:

x	$N(2^x)$	$N(3^x)$.	x	$N(2^x)$	$N(3^x)$.	x	$N(2^x)$.
0	1	1	11	48	111	22	171
1	2	3	12	56	131	23	186
2	4	7	13	65	152	24	202
3	6	12	14	74	175	25	218
4	9	19	15	84	199	26	235
5	13	27	16	95	225	27	253
6	17	37	17	106	252	28	271
7	22	49	18	118	281	29	290
8	28	62	19	130	312	30	309
9	34	77	20	143	344	31	329
10	41	93	21	157		32	350

Prøve: $N(2^{32}) + N(3^{20}) = 694 = 33\,.\,21 + 1.$

For
$$N'(n) = \tfrac{1}{2}\frac{(ln)^2}{l2\,l3} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{ln}{l2} + \frac{ln}{l3}\right) + 1$$
finder man
$$N'(n) - N'\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + \frac{ln}{l3} - \tfrac{1}{2}\frac{l2}{l3} = 1 + \frac{ln - \tfrac{1}{2}l2}{l3}$$
og analogt dermed
$$N'(n) - N'\left(\frac{n}{3}\right) = 1 + \frac{ln - \tfrac{1}{2}l3}{l2},$$
medens vi før havde
$$N(n) - N\left(\frac{n}{2}\right) = 1 + E\frac{ln}{l3}.$$

For $n = 2^x$ finder man altsaa
$$N'(2^x) = x + 1 + \frac{(1-\tfrac{1}{2})l2}{l3} + \frac{(2-\tfrac{1}{2})l2}{l3} + \frac{(3-\tfrac{1}{2})l2}{l3} + \ldots \frac{(x-\tfrac{1}{2})l2}{l3}, \tag{25}$$
medens
$$N(2^x) = x + 1 + E\frac{l2}{l3} + E\frac{2\,l2}{l3} + E\frac{3\,l2}{l3} \ldots + E\frac{x\,l2}{l3}. \tag{25'}$$

Bestemmelsen af de snævrest mulige Grænser for Afvigelsen mellem N og N' vilde altsaa afhænge af en Sammenligning mellem Rækker af Formen

$$\Sigma Eak \quad \text{og} \quad \Sigma(a - \tfrac{1}{2})k. \qquad a = 1,\ 2,\ 3 \ldots; \qquad k \text{ irrational.}$$

En grafisk Fremstilling vil vise, at saadanne Rækker ville stemme temmelig nøje overens, og for rationale k vilde der komme en Periodicitet i Afvigelserne, foruden et af k afhængigt Led, men en nærmere Undersøgelse af disse Forhold ligger udenfor denne Afhandlings Opgave.

Vi have set, at man, naar 2^α og 3^β ere noget nær ligestore, kan faa en exakt Bestemmelse af $N(2^\alpha 3^\beta)$ og ligeledes af $N(\sqrt{2^\alpha 3^\beta})$. Er derimod n givet almindelig, er man henvist til at benytte (22) eller rettere sagt (12) til at danne en Rekursionsformel. Denne vil her antage Formen
$$N(n) = N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right) + D_p(n), \tag{26}$$
hvor $p = 2^\alpha 3^\beta$, og hvor sidste Led kan erstattes ved
$$D_p(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1) - D_p\left(\frac{p}{n}\right) + \rho, \tag{27}$$
hvor $\rho = 0$, undtagen hvis n gaar op i p, da $\rho = 1$. Det kommer her an paa for p at vælge et saadant Tal, at saavel de første Led paa højre Side blive saa smaa som muligt, som at $D_p(n)$ kan bestemmes exakt eller i det mindste reduceres til et N med lavt Argument. Det simpleste er at vælge $p < n$ men dog saa nær som muligt lig n og saaledes, at 2^α og 3^β ere omtrent lige store, idet man da faar $D_p(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1)$, medens samtidig de to første Led paa højre Side af (26) faa Argumenter, som omtrent ere $\sqrt{n}$, medens det 3die Led nærmer sig stærkt til 0.

Man kunde ogsaa vælge $p > n$ og da navnlig saaledes, at Argumenterne

$$\frac{n}{2^{\alpha+1}}, \quad \frac{n}{3^{\beta+1}} \quad \text{og} \quad \frac{p}{n}$$

omtrentlig ere lige store. Dette vil opnaas ved for $2^{\alpha+1}$ og $3^{\beta+1}$ at vælge Potenser, som ere omtrent lig med $n^{\frac{2}{3}}$. Samtidig bliver da det 3die Led paa højre Side i (26) Nul, medens $D_p\left(\frac{p}{n}\right)$ vil blive lig $N\left(\frac{p}{n}\right)$, saa at man faar

$$N(n) = (\alpha+1)(\beta+1) + N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - N\left(\frac{2^\alpha 3^\beta}{n}\right) + \rho, \tag{28}$$

hvor $\rho = 1$, naar $\frac{2^\alpha 3^\beta}{n}$ er hel, og ellers $\rho = 0$.

Ex. 1. $n = 1000$. Vi vælge $2^{\alpha+1} = 2^7 = 128$, $3^{\beta+1} = 3^4 = 81$, som giver

$$N(1000) = 28 + N(7) + N(12) - N(1) = 28 + 5 + 8 - 1 = 40.$$

Ex. 2. $n = 1000000$, $2^{\alpha+1} = 2^{14} = 16584$, $3^{\beta+1} = 3^9 = 19683$.

$$N(1000000) = 126 + N(61) + N(50) - N(53) = 126 + 16 + 15 - 15 = 142.$$

Resultatet kan prøves ved Anvendelse af Formlen $N(n) - N\left(\frac{n}{3}\right) = E\frac{l2\,n}{l2}$.

Det er tydeligt, at man ogsaa vil faa rigtige Resultater ved i det foregaaende at erstatte Primtallene 2 og 3 med andre eller endog ved et vilkaarligt Par Tal, som ere indbyrdes Primtal.

Udtrykt ved ufuldstændige Kvotienter bliver $N_{23}(n) = \Sigma\mu'(x)\,E\frac{n}{x}$, hvor $\mu'(x) = \mu(x)$, naar ikke x er delelig med 2 eller 3, i hvilket Fald $\mu'(x) = 0$, altsaa

$$N_{23}(n) = E\frac{n}{1} - E\frac{n}{5} - E\frac{n}{7} - E\frac{n}{11} - \ldots + E\frac{n}{35} + \ldots . \tag{29}$$

Gaa vi dernæst over til Betragtningen af Tal, som indeholde indtil 3 Primfaktorer 2, 3, 5, saa haves først

$$N_{235}(n) - N_{235}\left(\frac{n}{5}\right) = N_{23}(n),$$

eller

$$N_{235}(n) = N_{23}(n) + N_{23}\left(\frac{n}{5}\right) + N_{23}\left(\frac{n}{5^2}\right) + \ldots, \tag{30}$$

og de dermed analoge, som reducere Bestemmelsen til den simplere Bestemmelse af N_{23}.

Endvidere haves Fundamentalligningen

$$N(n) - N\left(\frac{n}{2}\right) - N\left(\frac{n}{3}\right) - N\left(\frac{n}{5}\right) + N\left(\frac{n}{2.3}\right) + N\left(\frac{n}{2.5}\right) + N\left(\frac{n}{3.5}\right) - N\left(\frac{n}{2.3.5}\right) = 1, \tag{31}$$

og mere almindelig den af (12) fremgaaende Ligning

$$N(n) - N\left(\frac{n}{2^\alpha}\right) - N\left(\frac{n}{3^\beta}\right) - N\left(\frac{n}{5^\gamma}\right) + N\left(\frac{n}{2^\alpha 3^\beta}\right) \ldots - N\left(\frac{n}{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma}\right) = D_p(n)\,, \qquad (32)$$

hvor $D_p(n)$ betegner Antallet af Divisorer i $p = 2^{\alpha-1}\,.\,3^{\beta-1}\,.\,5^{\gamma-1}$ op til n. $D(n)$ kan, forudsat at n ikke selv er Divisor i p, erstattes ved $\alpha\beta\gamma - D\left(\frac{p}{n}\right)$; er n Divisor, tillægges en Enhed.

Hvis vi sætte $n = \sqrt{p}$, og p ikke er noget Kvadrattal, faas altsaa paa højre Side $\frac{1}{2}\alpha\beta\gamma$, medens nogle af Leddene paa venstre Side forsvinde.

For $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ faas

$$N(2^\alpha 3^\beta 5^\gamma) - N(2^\alpha 3^\beta) - N(2^\alpha 5^\gamma) - N(3^\beta 5^\gamma) + N(2^\alpha) + N(3^\beta) + N(5^\gamma) - 1 = \alpha\beta\gamma.$$

Vi naa imidlertid ad denne Vej ikke synderlig videre, saalænge Exponenterne ere ubestemte, hvorimod man for givne Talværdier hurtig kan opnaa en ret betydelig Reduktion ved (32). Exempelvis ville vi beregne $N(1000)$, idet vi forudsætte N bekjendt for Værdier < 15.

Vi vælge først $p = 900 = 2^2 3^2 5^2$; saa er

$$D_p(1000) = 3\,.\,3\,.\,3 = 27\,, \text{ og}$$

$$\begin{aligned} N(1000) &= 27 + N\left(\frac{1000}{8}\right) + N\left(\frac{1000}{27}\right) + N\left(\frac{1000}{125}\right) - N\left(\frac{1000}{216}\right) - N\left(\frac{1000}{1000}\right) \\ &= 27 + N(125) + N(37) + N(8) - N(4) - N(1) \\ &= 29 + N(125) + N(37). \end{aligned}$$

$120 = 2^3.\,3\,.\,5$ giver

$$N(125) = N\left(\frac{125}{16}\right) + N\left(\frac{125}{9}\right) + N\left(\frac{125}{25}\right) + 16 = 6 + 10 + 5 + 16 = 37.$$

$36 = 2^2.\,3^2$ giver

$$N(37) = N\left(\frac{37}{8}\right) + N\left(\frac{37}{27}\right) + N\left(\frac{37}{5}\right) + 9 = 4 + 1 + 6 + 9 = 20\,,$$

altsaa

$$N(1000) = 29 + 37 + 20 = 86.$$

Beregningen kan varieres paa mangfoldige Maader. F. Ex. ogsaa

$$1000 = 2^3.\,5^3, \quad p = 2^6.\,5^6, \quad \text{giver}$$

$$N(1000) - N\left(\frac{1000}{128}\right) - N\left(\frac{1000}{3}\right) + N\left(\frac{1000}{3\,.\,2^7}\right) = \tfrac{1}{2}(7\,.\,7 + 1) = 25\,;$$

$$N(1000) = N(333) + N(7) - N(2) + 25 = N(333) + 29.$$

$p = 2^4.\,5\,.\,3^3 = 2160$ giver

$$D_p(333) = 5\,.\,2\,.\,4 - D_p\left(\frac{2160}{333}\right) = 40 - 6 = 34\,,$$

$$N(333) = N\left(\frac{333}{32}\right) + N\left(\frac{333}{25}\right) + N\left(\frac{333}{81}\right) + 34 = 57\,,$$

$$N(1000) = 29 + 57 = 86.$$

Fundamentalligningen for N tilfredsstilles ogsaa her af en kontinuert Funktion. Da nemlig ifølge (11)

$$\Sigma\mu(d)\,(l\,d)^s = \begin{cases} -1\,.\,2\,.\,3\,.\,l2\,.\,l3\,.\,l5 \text{ for } s = 3\,, \\ 0 \text{ for } s < 3\,, \end{cases}$$

naar d betegner alle Divisorer i et Tal $2^x\,.\,3^y\,.\,5^z$, saa haves

$$\Sigma\mu(d)\left(l\left(\frac{n}{d}\right)\right)^3 = \Sigma\mu(d)\left((ln)^3 - 3(ln)^2\,ld + 3\,ln\,(ld)^2 - (ld)^3\right) = -1\,.\,2\,.\,3\,.\,l2\,.\,l3\,.\,l5\,,$$

og sættes altsaa

$$N'(n) = \frac{1}{6}\frac{ln}{l2}\cdot\frac{ln}{l3}\cdot\frac{ln}{l5}\,, \tag{33}$$

haves en kontinuert Funktion, for hvilken den samme Ligning gjælder som for selve N, nemlig

$$N'(n) - N'\left(\frac{n}{2}\right) - N'\left(\frac{n}{3}\right) - N'\left(\frac{n}{5}\right) + N'\left(\frac{n}{2.3}\right) + N'\left(\frac{n}{2.5}\right) + N'\left(\frac{n}{3.5}\right) - N'\left(\frac{n}{2.3.5}\right) = 1.$$

Ligningen vedbliver at gjælde, om man til N' adderer et Udtryk af Formen $A(ln)^2 + Bln + C$, hvor A, B, C ere arbitrære Konstanter.

Det frembyder sig herefter af sig selv i Almindelighed at søge en tilnærmet Bestemmelse af $N(n)$ ved Hjælp af en Række af Formen

$$A + Bln + C(ln)^2 + D(ln)^3 + R\,,$$

hvor R betegner et Restled, som ikke indeholder noget Led af samme Form som de andre.

Naar det var givet, at en Funktion $\psi(n)$ kunde fremstilles exakt ved en endelig Række af Formen

$$\psi(n) = A + Bln + C(ln)^2 + D(ln)^3\,,$$

saa maatte de enkelte Koefficienter kunne bestemmes saaledes. Lad a, b, c være 3 forskjellige Primtal og d en vilkaarlig Divisor i abc, saa er, idet Summen udstrækkes til alle Divisorer

$$\Sigma\mu(d)\psi\left(\frac{n}{d}\right) = D\,.\,\Sigma\mu(d)\left(l\left(\frac{n}{d}\right)\right)^3 = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,la\,.\,lb\,.\,lc\,,$$

altsaa faas

$$D = \frac{\Sigma\mu(d)\psi\left(\frac{n}{d}\right)}{6\,la\,.\,lb\,.\,lc}\,,$$

som kan findes, hvis Tælleren er bekjendt. Dernæst kan $\psi(n) - D(ln)^3$ udtrykkes ved en Række, hvor 2den Potens af ln er den højeste, og man faar derefter

$$C = \frac{\Sigma\mu(d)\left[\left(\psi\left(\frac{n}{d}\right) - D\left(l\left(\frac{n}{d}\right)\right)^3\right]}{2\,la\,.\,lb}\,,$$

hvor d nu betegner Divisorerne i ab, men hvor man iøvrigt med samme Ret kunde benytte to andre Primtal f. Ex. b, c eller c, a.

Er C bestemt, findes

$$B = \frac{\Sigma\mu(d)\left[\left(\psi\left(\frac{n}{d}\right) - D\left(l\left(\frac{n}{d}\right)\right)^3 - C\left(l\left(\frac{n}{d}\right)\right)^2\right]}{l\,a}, \quad (d \text{ Divisor i } a)$$

og endelig

$$A = \psi(n) - (D(ln)^3 + C(ln)^2 + B\,ln).$$

Vi have her for Kortheds Skyld holdt os til Rækker med højst 3die Potens af ln, men det er aabenbart, at Methoden er almindelig, kun maa man, hvis der er flere Led, benytte et tilsvarende Antal Primtal. Ogsaa naar $\psi(n)$ ikke kan udtrykkes exakt ved en Række af den angivne Form, kan man paa denne Maade faa en Tilnærmelsesformel. Forsaavidt Koefficienterne A, B, $C\ldots$ virkelig blive konstante, vil den Rest, $R(n)$, som i et saadant Fald skal tilføjes, dog tilfredsstille en Række Ligninger af Formen $\Sigma\mu(d)R\left(\frac{n}{d}\right) = 0$. Disse Ligninger kunne reduceres til

$$R(n) - R\left(\frac{n}{a}\right) = 0, \quad R(n) - R\left(\frac{n}{b}\right) = 0, \quad R(n) - R\left(\frac{n}{c}\right) = 0,$$

svarende til alle de Primtal, man har benyttet, og Resten maa derfor antages at blive en Funktion, der oscillerer om Nul som Middelværdi.

Hvad det særlig kommer an paa, er altsaa Bestemmelsen af Summerne $\Sigma\mu(d)\psi\left(\frac{n}{d}\right)$. Denne kan i det foreliggende Tilfælde kun delvis gjøres exakt, men der synes dog at være en Mulighed for en brugbar sukcessive tilnærmet Bestemmelse.

Vi skulle nu betragte de simpleste Anvendelser, idet vi begynde med for $\psi(n)$ at sætte Antallet af Potenser af Primtallet a op til n. Saa er altsaa

$$\psi(n) = N_a(n) = E\frac{ln}{la} + 1.$$

Her er

$$\Sigma\mu(d)\psi\left(\frac{n}{d}\right) = N(n) - N\left(\frac{n}{a}\right) = 1,$$

altsaa

$$B = \frac{1}{la}.$$

Følgelig er

$$N(n) = \frac{ln}{la} + A.$$

A er nøjagtig $1 + E\frac{ln}{la} - \frac{ln}{la}$, som altid er en positiv ægte Brøk.

Sætte vi

$$N_a(n) = \frac{ln}{la} + \tfrac{1}{2} + R(n),$$

saa er $R(n)$ beliggende mellem Grænserne $\pm\frac{1}{2}$, og man vil tilmed have

$$R(n) - R\left(\frac{n}{a}\right) = N(n) - N\left(\frac{n}{a}\right) - \left(\frac{ln}{la} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\frac{l\frac{n}{a}}{la} + \tfrac{1}{2}\right) = 0;$$

derimod ikke $R(n) - R\left(\frac{n}{b}\right) = 0$, naar b er et fra a forskjelligt Primtal.

Gaa vi dernæst til Tal sammensatte af Potenser af 2 Primtal a og b, saa er her for $N = N_{ab}$

$$N(n) - N\left(\frac{n}{a}\right) - N\left(\frac{n}{b}\right) + N\left(\frac{n}{ab}\right) = 1,$$

altsaa

$$C = \frac{1}{2\,la\,lb},$$

hvorefter søges

$$\Sigma\mu(d)\left(N\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{\left(l\frac{n}{d}\right)^2}{2\,la\,lb}\right),$$

idet d er Divisor i b.

Men $$N_{ab}(n) - N_{ab}\left(\frac{n}{b}\right) = N_a(n) = 1 + E\frac{ln}{la} \text{ eller } \frac{ln}{la} + \tfrac{1}{2} + R(n),$$

medens

$$-\frac{1}{2\,la\,lb}\Sigma\mu(d)\left(l\frac{n}{d}\right)^2 = -\frac{1}{2\,la\,lb}\Sigma\mu(d)\left((ln)^2 - 2\,ln\,ld + (ld)^2\right) = -\frac{ln}{la} - \frac{1}{2\,la\,lb}\Sigma\mu(d)(ld)^2 =$$
$$-\frac{ln}{la} + \frac{1}{2\,la\,lb}(lb)^2 = -\frac{ln}{la} + \frac{lb}{2la}.$$

Altsaa faas

$$B = \frac{1}{lb}\left[\tfrac{1}{2} + R(n) + \frac{lb}{2la}\right] = \tfrac{1}{2}\frac{la + lb}{la\,.\,lb} + \frac{R(n)}{lb}.$$

Bortkaste vi den sidste Del, der ikke er konstant men svinger mellem Grænserne $\pm\frac{1}{2\,lb}$, saa bliver den øvrige Del af B en symmetrisk Funktion af a og b og faas altsaa som Koefficient til ln, hvad enten man benytter Divisorerne i b eller i a til Bestemmelsen. Vi kunne altsaa sætte

$$N_{ab}(n) = \tfrac{1}{2}\frac{(ln)^2}{la\,lb} + \tfrac{1}{2}\frac{lab\,.\,ln}{la\,lb} + R', \tag{34}$$

hvor R' vel kan indeholde et konstant Led men ikke Led af Formen $C'(ln)^2 + B'(ln)$ med konstante Koefficienter, omend Grænserne for R' muligvis kunne være proportionale med ln.

For $\psi(n) = N_{abc}(n)$ faas paa lignende Maade først

$$D = \tfrac{1}{6}\frac{1}{la\,lb\,lc},$$

dernæst

$$C = \frac{1}{2\,la\,lb}\left(N(n) - N\left(\frac{n}{a}\right) - N\left(\frac{n}{b}\right) + N\left(\frac{n}{ab}\right) - D\,.\,\Sigma\mu(d)\left(l\frac{n}{d}\right)^3\right)$$
$$= \frac{1}{2\,la\,lb}\left(f(n) - \frac{6\,ln\,.\,la\,.\,lb - 3\,la\,.\,lb\,.\,lab}{6\,la\,lb\,lc}\right), \quad d \text{ Divisor i } ab,$$

idet $f(n) = N(n) - N\left(\frac{n}{a}\right) - N\left(\frac{n}{b}\right) + N\left(\frac{n}{ab}\right)$, og altsaa

$$f(n) - f\left(\frac{n}{c}\right) = 1, \text{ hvoraf } f(n) = E\frac{ln}{lc} + 1 = \frac{ln}{lc} + \tfrac{1}{2} + R.$$

Følgelig er paa en oscillerende Funktion R nær

$$C = \frac{1}{2\,la\,lb}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{lab}{lc}\right) = \frac{1}{4}\frac{labc}{la\,lb\,lc}.$$

Det fundne Udtryk er en symmetrisk Funktion af a, b, c, som det bør være. Herefter faas atter

$$B = \frac{1}{lc}\left[\left(N(n) - N\left(\frac{n}{c}\right)\right) - D\left((ln)^3 - \left(l\left(\frac{n}{c}\right)\right)^3\right) - C\left((ln)^2 - l\left(\frac{n}{c}\right)^2\right)\right],$$

idet vi atter her bortkaste de oscillerende Led og tillige iagttage, at B maa være symmetrisk med Hensyn til a, b og c. Til Bestemmelse heraf haves først

$$N_{abc}(n) - N_{abc}\left(\frac{n}{c}\right) = N_{ab}(n),$$

hvor man for $N_{ab}(n)$ kan benytte det ovenfor fundne Udtryk med Tilføjelse af en foreløbig ubestemt Konstant $\varkappa$, altsaa, idet Resten bortkastes,

$$N_{ab}(n) = \tfrac{1}{2}\frac{(ln)^2}{la\,lb} + \tfrac{1}{2}\frac{lab\,.\,ln}{la\,lb} + \varkappa.$$

Endvidere er

$$D\left((ln)^3 - \left(l\left(\frac{n}{c}\right)\right)^3\right) = \frac{1}{6\,la\,lb\,lc}(3\,(ln)^2\,lc - 3\,ln(lc)^2 + (lc)^3),$$

$$C\left((ln)^2 - \left(l\left(\frac{n}{c}\right)\right)^2\right) = \frac{labc}{4\,la\,lb\,lc}(2\,ln\,lc - (lc)^2),$$

og altsaa bliver, idet Leddene med $(ln)^2$ og ln hæve hinanden,

$$B = \frac{\varkappa}{lc} - \frac{1}{la\,lb\,lc}\left(\frac{(lc)^2}{6} - \frac{lc\,.\,labc}{4}\right).$$

Da B bør være symmetrisk med Hensyn til a, b, c, kunne vi forsøge, om dette kan opnaas ved en passende Bestemmelse af $\varkappa$ som symmetrisk Funktion af a og b alene.

Den eneste Maade, hvorpaa dette kan ske, er ved at sætte

$$\varkappa = \frac{1}{la\,lb}\left[\frac{(la)^2 + (lb)^2}{12} + \frac{la\,lb}{4}\right] = \frac{1}{12}\frac{(lab)^2 + la\,lb}{la\,lb},$$

som giver

$$B = \frac{1}{la\,lb\,lc}\left[\frac{(la)^2 + (lb)^2 + (lc)^2}{12} + \frac{la\,lb + lb\,lc + lc\,la}{4}\right],$$

eller

$$B = \frac{1}{12}\frac{1}{la\,lb\,lc}((labc)^2 + la\,lb + lb\,lc + lc\,la).$$

Altsaa er Tilnærmelsesformlen følgende

$$N'_{abc}(n) = \frac{1}{6}\frac{(ln)^3}{la\,lb\,lc} + \frac{1}{4}\frac{labc\,.\,(ln)^2}{la\,lb\,lc} + \frac{1}{12}\frac{(labc)^2 + la\,lb + lb\,lc + lc\,la}{la\,lb\,lc}\,ln + A, \tag{35}$$

hvor A er konstant. Formlen (34) ændres samtidig til

$$N_{ab}(n) = \frac{1}{2}\frac{(ln)^2}{la\,lb} + \frac{1}{2}\frac{lab\,.\,ln}{la\,lb} + \frac{1}{12}\frac{(lab)^2 + la\,lb}{la\,lb}. \tag{34'}$$

Vi have altsaa her ikke blot opnaaet en Bestemmelse af den søgte Koefficient B men ogsaa af den konstante Størrelse $\varkappa$, som maa indgaa i $N_{ab}(n)$, og ved nu at anvende den samme Fremgangsmaade for Tal med 4 Primfaktorer maatte man altsaa ogsaa kunne faa Værdien af Konstanten A i N_{abc}.

Det synes, at man ad denne Vej vil kunne konstruere brugbare Tilnærmelsesformler, men den angivne Methode lider foreløbig af den Mangel, at der savnes et sikkert Middel til Bedømmelsen af Fejlenes Størrelse; det synes vel, at Fejlen vil kunne bestemmes ved et Udtryk efter Potenser af ln af en Orden, som er en Enhed lavere end Formlen for selve $N(n)$, og med oscillerende Koefficienter, for hvilke Grænser kunne angives, men en numerisk Beregning tyder snarere paa, at Fejlgrænserne langtfra stige saa stærkt. Vi anføre nedenfor en lille Tabel, som angiver Afvigelserne mellem $N(n)$ og Tilnærmelsesformlerne for $n = e^x$, $x = 0, 1, 2 \dots 10$, og skjønt en saadan Sammenligning kun giver et rent overfladisk Skjøn, viser den dog, at der neppe vilde kunne findes nogen anden lige saa simpel kontinuert Tilnærmelsesformel, som vilde give en bedre Fremstilling af den betragtede diskontinuerte Funktion.

x	e^x	N_{23}	N'_{23}	$N-N'$	N_{235}	N'_{235}	$N-N'$
0	1·0	1	0·4	0·6	1	0	1·0
1	2·7	2	2·3	— 0·3	2	1·9	0·1
2	7·4	5	5·4	— 0·4	6	5·9	0·1
3	20·1	10	9·9	0·1	14	13·0	1·0
4	54·6	16	15·6	0·4	25	23·9	1·1
5	148·4	23	22·7	0·3	40	39·5	0·5
6	403·4	31	31·1	— 0·1	61	60·6	0·4
7	1096·6	41	40·8	0·2	88	87·9	0·1
8	2981·0	52	51·9	0·1	122	122·3	— 0·3
9	8103·1	64	64·2	— 0·2	166	164·7	1·3
10	22026·5	78	77·9	0·1	217	215·7	1·3

Formlerne ere

$$N'_{23}(e^x) = 0{\cdot}6566\,x^2 + 1{\cdot}1765\,x + 0{\cdot}4347.$$
$$N'_{235}(e^x) = 0{\cdot}1360\,x^3 + 0{\cdot}6938\,x^2 + 1{\cdot}0344\,x + k.$$

I Tabellen er k sat lig 0, saa at altsaa Differenserne $N—N'$ i sidste Kolonne alle skulle formindskes med en konstant Størrelse.

III.

Vi gaa dernæst over til Undersøgelsen af, om lignende Fremgangsmaader kunne anvendes ved Bestemmelsen af Funktionen $\sum_1^n \lambda(x)$, hvor x betegner et Tal, der er sammensat af visse bestemte Primtal, og λ har den tidligere angivne Betydning. Vi betegne denne Sum udstrakt til alle Tal af den bestemte Form, vi til enhver Tid betragte, og som ere $\overline{\gtrless} n$, ved $L(n)$, medens som før $\Lambda_p(n)$ kun betegner Summen af de λ, som svare til Divisorerne i et vist givet Tal p, forsaavidt disse ere $\overline{\gtrless} n$. De givne Primtal være 2, 3, 5...

De forskjellige λ blive da Koefficienterne i det udviklede Produkt

$$(1-2+2^2\ldots+(-2)^\alpha+(-2)^{\alpha+1}\ldots)(1-3+3^2\ldots+(-3)^\beta+(-3)^{\beta+1}+\ldots)(1-5+\ldots)$$

hvis enkelte Faktorer vi for Kortheds Skyld betegne ved R_2, R_3 o. s. v. Saa ses, at man identisk har

$$\begin{aligned} & R_2 R_3 R_5 \ldots (1-(-2)^{\alpha+1})(1-(-3)^{\beta+1})(1-(-5)^{\gamma+1})\ldots \\ = & (1-2+2^2\ldots+(-2)^\alpha)(1-3+3^2\ldots+(-3)^\beta)(1-5+5^2+\ldots(-5)^\gamma)\ldots, \end{aligned}$$

forsaavidt man kun betragter de to Rækker med Hensyn til de enkelte Led, som forekomme i dem.

Venstre Side skrives hensigtsmæssigere under Formen

$$R_2 R_3 R_5 \ldots (1+(-1)^\alpha 2^{\alpha+1})(1+(-1)^\beta 3^{\beta+1})(1+(-1)^\gamma 5^{\gamma+1})\ldots.$$

Af denne Omskrivning faa vi nu følgende Sætning. Betegnes ved p Produktet $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$, saa er for et vilkaarligt n

$$\begin{aligned} L(n)+(-1)^\alpha L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right)+(-1)^\beta L\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right)+\ldots+(-1)^{\alpha+\beta} L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right)\ldots+ \\ +(-1)^{\alpha+\beta+\gamma} L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}5^{\gamma+1}}\right)\ldots=\Lambda_p(n). \qquad (36) \end{aligned}$$

Er specielt $\alpha=\beta=\gamma\ldots=0$, faas

$$L(n)+L\left(\frac{n}{2}\right)+L\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots+L\left(\frac{n}{2.3}\right)+L\left(\frac{n}{3.5}\right)\ldots+L\left(\frac{n}{2.3.5}\right)\ldots=1, \qquad (37)$$

idet der i Nævnerne kun indgaar Produkter af 0^{te} og 1^{ste} Potenser af alle de Primtal, som ere Faktorer i de sammensatte Tal p, vi betragte.

Ligningen (36) er ganske analog med (12), den tilsvarende for N, og kan anvendes ligesom denne.

Navnlig bemærkes, at for $p<n$ er $\Lambda_p(n)=0$ eller 1, eftersom p er et Kvadrattal eller ikke. Er $n=\sqrt{p}$ og selv et Kvadrattal, faas

$$\Lambda_p(n)=\tfrac{1}{2}(\Lambda(p)+1)=1.$$

Hvor $p > n$, kan man ofte med Fordel i Stedet for $\Lambda_p(n)$ sætte $\Lambda(p) - \lambda(p)\Lambda\left(\frac{p}{n}\right)$, hvortil dog maa føjes $\lambda(n)$, hvis n gaar op i p.

Disse Formler give i alle Tilfælde Midlerne til en sukcessiv Bestemmelse af L, idet α, β, γ vælges saaledes, at Λ-Funktionerne let kunne findes.

$L(n)$ kan som alle andre numeriske Funktioner udvikles i Række efter ufuldstændige Kvotienter af Formen $E\frac{n}{s}$, hvor $s = 1, 2 \ldots n$. Denne Række bestemmes ved at bemærke, at da $\sum_1^n \mu_s E\frac{n}{s} = 1$ undtagen for alle $\frac{n}{s} < 1$, da denne Sum er 0, saa vil i Almindelighed

$$A\sum_1^n \mu_s E\frac{n}{as} + B\Sigma\mu_s E\frac{n}{bs} + C\Sigma\mu_s E\frac{n}{cs} + \ldots,$$

hvor a, b, c ere positive hele Tal, angive et Udtryk for en Funktion, der for $n < A$ er 0, derefter lig A, saalænge $n < b$, dernæst $A + B$, saalænge $n < c$, o. s. v.; idet Rækken stadig tænkes ordnet saaledes, at Tallene a, b, c voxe. Herved faas for $L(n)$ Udtrykket

$$L(n) = \sum_1^n \sum_1^n \mu_s \lambda_x E\frac{n}{xs}, \tag{38}$$

hvor s ere alle hele Tal, x de Tal, som ere sammensatte af de bestemte Primtal, som vi betragte, og der er herefter kun at undersøge, hvilken Koefficient der optræder som Faktor til en bestemt Kvotient $E\frac{n}{y}$, en Undersøgelse, som i et forelagt Tilfælde ikke frembyder nogen Vanskelighed. Koefficienten vil udtrykkes ved

$$\Sigma\mu(d)\lambda\left(\frac{y}{d}\right),$$

udstrakt til alle Divisorer i y, idet λ sættes lig 0 for de Divisorer, som ikke høre til den betragtede Talform.

Skrives y som $2^\alpha 3^\beta \ldots . a^\rho b^\sigma \ldots$, hvor a, b betegne de Primfaktorer, som ikke høre med iblandt dem, der forekomme i Tallene x, saa kan denne Sum skrives som

$$\Sigma\mu\left(\frac{y}{d}\right)\lambda(d),$$

hvor d nu alene betegner Divisorerne i $2^\alpha 3^\beta \ldots$.

Men
$$\frac{y}{d} = a^\rho b^\sigma \ldots . \frac{2^\alpha 3^\beta}{d},$$

og følgelig maa ogsaa

$$\mu\left(\frac{y}{d}\right) = \mu(a^\rho b^\sigma) . \mu\left(\frac{2^\alpha 3^\beta}{d}\right).$$

Altsaa
$$\Sigma\mu\left(\frac{y}{d}\right)\lambda(d) = \mu(a^\rho b^\sigma) . \Sigma\mu\left(\frac{2^\alpha 3^\beta \ldots}{d}\right)\lambda(d)$$

$$= \mu(a^\rho b^\sigma \ldots) . \Sigma\mu(d)\lambda\left(\frac{2^\alpha 3^\beta \ldots}{d}\right) = \mu(a^\rho b^\sigma \ldots)\lambda(2^\alpha 3^\beta \ldots)\Sigma\mu^2(d),$$

hvor d altsaa kan indskrænkes til Divisorerne i $2 . 3 \ldots$. Derved bliver $\Sigma\mu^2(d) = 2^\varkappa$, hvor $\varkappa$ er Antallet af forskjellige Primfaktorer af Rækken $2, 3 \ldots$, som indgaa i det paagjældende y, medens $\mu(a^\rho b^\sigma \ldots)$ alene afhænger af de andre Primfaktorer $a, b \ldots$.

Alle Koefficienter i Rækken

$$L(n) = \Sigma c_y E\frac{n}{y}, \tag{39}$$

blive altsaa af Formen

$$c_y = \varepsilon . 2^\varkappa, \quad \varepsilon = -1, \quad 0 + 1.$$

F. Ex.

$$L_{23}(n) = E\frac{n}{1} - 2E\frac{n}{2} - 2E\frac{n}{3} + 2E\frac{n}{4} - E\frac{n}{5} + 4E\frac{n}{6} - E\frac{n}{7} - 2E\frac{n}{8}$$
$$+ 2E\frac{n}{9} + 2E\frac{n}{10} - E\frac{n}{11} - 4E\frac{n}{12} \ldots,$$
$$L_{35}(n) = E\frac{n}{1} - E\frac{n}{2} - 2E\frac{n}{3} - 2E\frac{n}{5} + 2E\frac{n}{6} - E\frac{n}{7} + 2E\frac{n}{9} + 2E\frac{n}{10}$$
$$- E\frac{n}{11} - E\frac{n}{13} + E\frac{n}{14} + 4E\frac{n}{15} - E\frac{n}{17} \ldots.$$

Af større Interesse er det, at L ogsaa kan udtrykkes ved Hjælp af N. Ethvert Tal af Formen $2^x 3^y 5^z \ldots$ kan nemlig paa en og kun paa en Maade skrives som Produkt af Kvadratet q^2 af et Tal af samme Form og en Divisor d i $2 . 3 . 5 \ldots$. Rækken af samtlige λ kan derfor opløses i en Sum af ligesaa mange andre Rækker som der er Divisorer i $2 . 3 . 5 \ldots$. Til en bestemt Divisor d hører Rækken $\Sigma\lambda(q^2 d)$, hvor q betegner de Kvadrattal af den givne Form, som ere $\overline{\overline{<}}\frac{n}{d}$. Disses Antal er $N\left(\sqrt{\frac{n}{d}}\right)$, og da $\lambda(q^2 d) = \lambda(d) = \mu(d)$, saa ses Summen af denne specielle Række at være $\mu(d) . N\left(\sqrt{\frac{n}{d}}\right)$, og altsaa

$$L(n) = \Sigma\mu(d) N\left(\sqrt{\frac{n}{d}}\right), \tag{40}$$

hvor d betegner alle Divisorer i $2 . 3 . 5 \ldots$, eller i udviklet Form

$$L(n) = N(\sqrt{n}) - N\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) - N\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) \ldots + N\left(\sqrt{\frac{n}{2 . 3}}\right) \ldots. \tag{40'}$$

Omvendt vil heraf følge

$$\Sigma L\left(E\frac{n}{x}\right) = N(\sqrt{n}). \tag{41}$$

Naar vi dernæst specielt betragte de Tal, som ere sammensatte af et ringe Antal Primfaktorer, saa findes først for et enkelt Primtal, f. Ex. 2

$$L_2(n) = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2}, \quad \text{hvor } \alpha = E\frac{ln}{l2}, \tag{42}$$

altsaa $L_2(n) = 1$ eller 0, eftersom α er lige eller ulige.

Tage vi dernæst to Primtal, 2 og 3, saa faas for $L_{2\,3}(n)$

$$\left.\begin{aligned} L(n) + L\left(\frac{n}{2}\right) + L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{n}{6}\right) &= 1 \\ L(n) - L\left(\frac{n}{4}\right) - L\left(\frac{n}{9}\right) + L\left(\frac{n}{36}\right) &= \Lambda(n), \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

hvor paa højre Side $\Lambda(n)$ bliver lig 0 for $n \gtreqless 6$. For lavere Værdier faas

$$\Lambda(n) = 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1 \quad \text{for} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

I Almindelighed er

$$L(n) + (-1)^\alpha L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + (-1)^\beta L\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) + (-1)^{\alpha+\beta} L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right) = \Lambda_p(n), \tag{44}$$

hvor højre Side angiver $\Sigma\lambda(d)$ for de Divisorer i $p = 2^\alpha 3^\beta$, som ere lig eller mindre end n.

Er altsaa $n > p$, faas paa højre Side 0, undtagen naar p er et Kvadrattal, da man erholder 1.

For $n = 2^\alpha 3^\beta$ findes altsaa

$$L(2^\alpha 3^\beta) = (-1)^\alpha L(3^\beta) + (-1)^\beta L(2^\alpha) - (-1)^{\alpha+\beta} + \rho, \tag{45}$$

hvor $\rho = 1$, naar α og β begge ere ulige, og ellers $\rho = 0$. De to sidste Led $-(-1)^{\alpha+\beta} + \rho$ kunne tilsammen skrives som

$$\tfrac{1}{4}\left(1 - (-1)^\alpha - (-1)^\beta - 3(-1)^{\alpha+\beta}\right),$$

som giver $\quad -1$ for α og β begge lige,

$\quad 0$ for α og β begge ulige,

og $\quad +1$ for α lige, β ulige eller omvendt.

Ere 2^α og 3^β sukcessive Potenser, saa blive $L(2^\alpha)$ og $L(3^\beta)$ lig $\Lambda(2^\alpha)$ og $\Lambda(3^\beta)$, svarende til Divisorerne i $2^\alpha 3^\beta$, og altsaa

$$L(2^\alpha) + \lambda(2^\alpha 3^\beta)\, L(3^\beta) = \Lambda(2^\alpha 3^\beta) + \lambda(2^\alpha),$$

eller ved Multiplikation med $\lambda(3^\beta)$

$$(-1)^\beta L(2^\alpha) + (-1)^\alpha L(3^\beta) - (-1)^{\alpha+\beta} = (-1)^\beta \Lambda(2^\alpha 3^\beta) = \rho',$$

hvor $\rho' = 1$, naar α og β begge ere lige, og ellers $\rho' = 0$.

Indsættes dette Udtryk i (45), faas

$$L(2^\alpha 3^\beta) = \rho + \rho' = \left\{\begin{matrix} 0 \text{ for } (\alpha+\beta) \text{ ulige} \\ 1 \text{ for } (\alpha+\beta) \text{ lige} \end{matrix}\right\}, \tag{46}$$

hvorved maa erindres, at denne Formel kun gjælder, naar 2^α og 3^β ere sukcessive Potenstal af 2 og 3.

F. Ex. $L(2.3) = L(6) = 1$, $L(2^2.3) = 0$, $L(2^3.3^2) = 0$, $L(2^4.3^2) = 1$.

Vi kunne imidlertid uden Vanskelighed se, hvorledes Formlen skal modificeres for det Tilfælde, da der mellem 2^α og 3^β ligge andre Potenstal. Thi lad f. Ex. 2^α være det mindste af de to Tal, saa er der ikke Tvivl om at $\Lambda(2^\alpha) = L(2^\alpha)$, men derimod vil $L(3^\beta)$ foruden $\Lambda(3^\beta)$ endnu indeholde de λ, som svare til saadanne Tal, der indeholde højere Potenser af 2 end 2^α. Men disse ville alle indeholde Faktoren $2^{\alpha+1}$, og da $\lambda(2^{\alpha+1}a) = \lambda(2^{\alpha+1}) . \lambda(a)$, saa maa altsaa haves

$$L(3^\beta) = \Lambda(3^\beta) + (-1)^{\alpha+1} L\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right) \quad \text{eller} \quad (-1)^\alpha L(3^\beta) = (-1)^\alpha \Lambda(3^\beta) - L\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right).$$

Et analogt Udtryk vilde faas, hvis $2^\alpha > 3^\beta$, saaledes at man altid under et kan skrive

$$(-1)^\beta L(2^\alpha) + (-1)^\alpha L(3^\beta) = (-1)^\beta \Lambda(2^\alpha) + (-1)^\alpha \Lambda(3^\beta) - L\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) - L\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right),$$

hvor altid det ene af de to sidste Led vil forsvinde.

Og heraf faas som før, idet α og β nu ere vilkaarlige

$$L(2^\alpha 3^\beta) = \rho + \rho' - L\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) - L\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right), \tag{47}$$

hvor

$$\rho + \rho' = \frac{1 + (-1)^{\alpha+\beta}}{2}.$$

F. Ex.

$$L(2^2 . 3^2) = 1 - L\left(\frac{3^2}{2^3}\right) = 0,$$

$$L(2^5 . 3^2) = L(288) = 0 - L\left(\frac{32}{27}\right) = -1 \text{ o.s.v.}$$

Paa lignende Maade kan man udlede, at

$$L(\sqrt{2^\alpha 3^\beta}) = \Lambda(\sqrt{2^\alpha 3^\beta}) - (-1)^\alpha L\left(\sqrt{\frac{3^\beta}{2^{\alpha+2}}}\right) - (-1)^\beta L\left(\sqrt{\frac{2^\alpha}{3^{\beta+2}}}\right), \tag{48}$$

hvor det første Led paa højre Side forsvinder, hvis α og β begge ere ulige Tal, saa at i dette Tilfælde faas

$$L(\sqrt{2^\alpha 3^\beta}) = L\left(\sqrt{\frac{3^\beta}{2^{\alpha+2}}}\right) + L\left(\sqrt{\frac{2^\alpha}{3^{\beta+2}}}\right). \tag{48'}$$

Da $L(n)$ for smaa Værdier af n svinger mellem Værdierne 1, 0, -1, saa se vi heraf, at man, hvor højt man end gaar op i Talrækken, dog altid kan angive Værdier af n, for hvilke $L(n)$ bliver 0, og disse Værdier følge tilmed efter hinanden med en vis Regelmæssighed. $L(n)$ vil derfor aldrig kunne afvige meget stærkt fra 0, men maa antages at svinge frem og tilbage omkring en eller anden Værdi i Nærheden af 0. Absolute Grænser for disse Udsving kunne faas udtrykte ved N. Thi naar man har $L(a) = L(b) = 0$, $a > b$, saa maa af de $N(a) - N(b)$ Tal af den givne Form, som ligge mellem a og b, Halvdelen have positive, Halvdelen have negative λ, og den største Afvigelse fra 0, der overhovedet kan tænkes mulig i Intervallet, vil da være $\pm \frac{1}{2}(N(a) - N(b))$. Men denne Grænse er sandsynligvis i Reglen for høj.

Det er let at angive den laveste Værdi af n, for hvilken $L(n)$ kan blive lig 2. Dertil kræves nemlig, at $\alpha + \beta$ skal være lige og

$$L\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) + L\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right) = -1.$$

Da den laveste Værdi af n, som giver $L(n) = -1$, er $n = 3$ (den næste derimod først $n = 32$), saa maa man altsaa forsøge, om man kan finde passende α og β, for hvilke

$$E\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) = 3 \quad \text{eller} \quad E\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right) = 0. \qquad (\alpha + \beta \text{ lige.})$$

Det vil ses, at den laveste Værdi, som kan bruges, svarer til $\alpha = 5$, $\beta = 1$, der giver

$$L(2^5 \,.\, 3) = L(96) = 1 - L(3) = 2.$$

De næste Værdier, som give $L(n) = 2$, ville være $2^5 \,.\, 3^5$ og $2^0 \,.\, 3^8$. $L(n) = 3$ kan først fremkomme ved Benyttelsen af saadanne Værdier af α og β, som give $L\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right)$ eller den analoge lig -2, hvilke atter maatte afledes af dem, som give $L(n) = +2$. Det synes at være vanskeligt her at angive nogen bestemt Regel, men man vil hurtig overbevise sig om at Udsvingene fra 0 kun stige meget langsomt.

I denne Sammenhæng kan fremhæves, at vi, ved at vælge 2^α og 3^β omtrent lig $\sqrt[3]{n^2}$, i Analogi med (28) kunne finde Formlen

$$L(n) = (-1)^{\alpha+1} L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + (-1)^{\beta+1} L\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) + (-1)^{\alpha+\beta+1} L\left(\frac{2^\alpha 3^\beta}{n}\right) + \varepsilon + \rho\,\lambda(n), \quad (49)$$

hvor $\varepsilon = 1$, hvis $2^\alpha 3^\beta$ er et Kvadrattal, og $\rho = 1$, hvis n gaar op i $2^\alpha 3^\beta$, medens i andre Tilfælde ε og ρ forsvinde. Antages nu, at den Funktion, som angiver Grænserne for den numeriske Afvigelse af $L(n)$ fra 0, er $f(n)$, og antages denne stadig voxende og at intet af Argumenterne paa højre Side overstiger $\sqrt[3]{n}$, saa maatte man have

$$f(n) + 1 < 3\left(f(n^{\frac{1}{3}}) + 1\right).$$

Men dette vilde atter medføre, at $L(n)$ blev beliggende indenfor Grænser, som afhænge af ln som det vigtigste Led, hvilket stemmer godt med den ovenfor angivne Grænse, men ej heller bringer os nogen virkelig ny Kundskab.

Det kan endnu bemærkes, at $L_{2\,3}(n)$ kan bestemmes ved Hjælp af $L_2(n)$ eller $L_3(n)$, idet man faar

$$L_{23}(n) + L_{23}\left(\frac{n}{3}\right) = L_2(n) \quad \text{eller} \quad L_{23}(n) + L_{23}\left(\frac{n}{2}\right) = L_3(n),$$

og deraf

$$\left.\begin{aligned} L_{23}(n) &= L_2(n) - L_2\left(\frac{n}{3}\right) + L_2\left(\frac{n}{9}\right) - L_2\left(\frac{n}{27}\right) + \dots \\ L_{23}(n) &= L_3(n) - L_3\left(\frac{n}{2}\right) + L_3\left(\frac{n}{4}\right) - L_3\left(\frac{n}{8}\right) + \dots \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

eller

Deraf erholdes en simpel Bestemmelse af $L_{23}(2^x)$ og $L_{23}(3^x)$ analog med den tilsvarende for N_{23}. For de laveste x ses Resultatet af efterfølgende Tabel.

x	$L(2^x)$	$L(3^x)$.	x	$L(2^x)$	$L(3^x)$.	x	$L(2^x)$.
0	1	1	11	0	−1	22	1
1	0	−1	12	0	1	23	0
2	0	1	13	1	0	24	0
3	0	0	14	0	1	25	0
4	1	1	15	0	−1	26	1
5	−1	−1	16	1	1	27	−1
6	1	1	17	0	0	28	1
7	0	−1	18	0	1	29	0
8	0	2	19	0	0	30	1
9	0	−1	20	1	0	31	−1
10	1	1	21	−1		32	2

Paa lignende Maade, som her er sket for $L_{23}(n)$, kunde vi nu behandle $L_{235}(n)$ ved Hjælp af de tidligere udviklede almindelige Principer. Det vilde derved vise sig, at man med forholdsvis stor Lethed kan opnaa en nøjagtig Beregning af $L(n)$ i hvert enkelt specielt Tilfælde, men om det vil være muligt at angive tilstrækkelig snævre Grænser for denne Funktions Afvigelse fra 0, maa bero paa, om det tilsvarende Problem kan løses udtømmende for $L_{23}(n)$. Det maa være senere Undersøgelser forbeholdt at afgjøre dette Spørgsmaal og muligvis at angive en almindelig Methode, som samtidig kan anvendes paa begge Funktionerne L og N, som i deres inderste Væsen ere nøje forbundne med hinanden.

Études de quelques fonctions numériques.

Par **J. P. Gram.**

Le mémoire qui précède a pour objet la recherche des propriétés de quelques fonctions élémentaires qui se présentent dans la théorie des nombres, et qui sont assez simples pour qu'on puisse conduire cette recherche relativement loin, en même temps qu'elles donnent de bons exemples des propriétés particulières de toutes les fonctions de la même espèce. Je considère principalement les nombres qui sont composés seulement de deux ou trois facteurs premiers donnés ou de puissances de ceux-ci. Comme types je prends les nombres de la forme $2^\alpha 3^\beta$ ou $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, mais on peut, sans différence essentielle, substituer à 2, 3, 5 d'autres facteurs premiers.

Je désigne par $N(n)$ la totalité de ces nombres jusqu'à une limite donnée, n, et par $L(n)$ la somme de leurs λ, en posant avec Liouville $\lambda(n)$ égal à ± 1 suivant que n est composé d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers, de manière à avoir

$$\lambda(2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma\cdots}.$$

Ce sont les fonctions N et L qui sont discutées dans ce mémoire.

I.

Comme préparation sont développés quelques théorèmes sur les diviseurs d'un nombre entier donné n.

Soit $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$, on a alors $D_n(n) = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ diviseurs. A un diviseur d en correspond un autre $\frac{n}{d}$, d'où il suit que le nombre des diviseurs plus grands que a est le même que le nombre de ceux qui sont plus petits que $\frac{n}{a}$. Par cette raison on a l'identité

$$D_n(m) + D_n\left(\frac{n}{m}\right) = D_n(n) + \varepsilon, \qquad \text{(voir 1)}$$

où ε est généralement nul, excepté seulement dans le cas où m divise n. $D_n(m)$ désigne le nombre des diviseurs de n jusqu'à la limite m inclusivement.

On a également $\lambda(d)\,\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \lambda(n)$, ou $\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \lambda(n)\,.\,\lambda(d)$, et si l'on désigne par $\Lambda_n(m)$ la somme $\Sigma\lambda(d)$ étendue à tous les diviseurs de n depuis 1 jusqu'à m, on pourra poser

$$\Lambda_n(m) + \lambda(n)\Lambda_n\left(\frac{n}{m}\right) = \Lambda_n(n) + \varepsilon\,.\,\lambda(m)\,, \qquad \text{(voir 2)}$$

où ε est nul excepté quand m divise n, ε étant alors égal à 1. Pour $\Lambda_n(n)$, on obtient la valeur 1 ou 0 suivant que n est ou non un carré.

On trouve facilement $D_n(\sqrt{n})$ à l'aide de l'équation (1), de même que l'équation (4) montre que $\Lambda_n(\sqrt{n}) = 0$ quand $\lambda(n) = +1$ et n n'est pas un carré.

Des considérations tout à fait analogues peuvent être appliquées à la somme des logarithmes des diviseurs, $\Sigma l d$, et à la fonction $\Sigma\lambda(d) l d$. Je renverrai pour les résultats aux équations (5), (6), (7). Enfin il faut remarquer quelques équations renfermant les coefficients $\mu(x)$, qui deviennent nuls quand x contient un facteur carré; dans tous les autres cas, $\mu(x) = \lambda(x)$.

On a toujours $\Sigma\mu(d) = 0$ pour les diviseurs d'un nombre entier quelconque n plus grand que 1. On peut également chercher les valeurs de

$$\Sigma\mu(d)\,l d\,,\quad \Sigma\mu(d)(l d)^2,\ \text{etc.}$$

en comparant les coefficients des développements des deux membres de l'identité

$$(1 - a^x)(1 - b^x)(1 - c^x)\ldots = \Sigma\mu(d)\,d^x\,,$$

où la sommation s'étend à tous les diviseurs d'un nombre entier composé des facteurs premiers a, b, $c\ldots.$ On trouve ainsi des résultats importants exprimés par les formules suivantes

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\mu(d)(ld)^t &= (-1)^t.\,1\,.\,2\,\ldots.\,t\,.\,la\,.\,lb\,.\,lc\ldots\,, \\ \Sigma\mu(d)(ld)^s &= 0\,,\quad s < t\,, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

où s est supposé entier et t exprime le nombre des facteurs premiers différents a, b, $c\ldots$ qui entrent dans le nombre considéré.

II.

Les diviseurs de $p = 2^\alpha 3^\beta 5^\beta\ldots$ sont les termes qu'on obtient en développant le produit

$$(1 + 2 + \ldots 2^\alpha)(1 + 3 + \ldots 3^\beta)(1 + 5 + \ldots 5^\gamma)\ldots.$$

Remplaçons le facteur $(1 + 2 + \ldots 2^\alpha)$ par

$$(1 - 2^{\alpha+1})(1 + 2 + 2^2 + \ldots)\ \text{(à l'infini)}\,,$$

et ainsi de suite pour les autres facteurs. Alors en remarquant que les termes du produit infini

$$(1 + 2 + 2^2\ldots)(1 + 3 + 3^2\ldots)(1 + 5 + 5^2..)\,,$$

qui ne sont pas plus grands que n, sont précisément au nombre de $N_{2\,3\,5}\ldots(n)$, on trouve l'équation suivante

$$D_p(n) = N(n) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) - N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - N\left(\frac{n}{5^{\gamma+1}}\right) \ldots + N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}\,3^{\beta+1}}\right) \ldots \\ - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}\,3^{\beta+1}\,5^{\gamma+1}}\right) + \ldots . \qquad (12)$$

Si $\alpha = \beta = \gamma \ldots = 0$, l'équation se réduit à la forme (13) ou (13'). Au reste (12) contient comme cas spéciaux plusieurs formules bien connues. Si l'on y fait entrer toute la série des nombres premiers $2, 3, 5 \ldots$, N est remplacé par le symbole E de Legendre et on a une nouvelle expression pour le nombre des diviseurs de $2^\alpha . 3^\beta . 5^\gamma \ldots$ qui ne sont pas plus grands que n (voyez (14)).

Quand on se borne à un petit nombre de facteurs premiers différents, par exemple 2 et 3, (12) donne une formule importante de réduction qui permet de trouver immédiatement $N_{23}(\sqrt{2^\alpha 3^\beta})$ lorsque $2^\alpha 3^\beta$ sont des puissances consécutives de 2 et de 3, les puissances de ces nombres étant ordonnées suivant leur grandeur (voyez (18)). Généralement il faut, en premier lieu, choisir les exposants α et β de manière que $D_p(n)$ puisse être trouvé ou directement ou par (1), et en outre avoir soin de prendre α et β aussi grands que possible.

Alors on pourra toujours, à l'aide des formules

$$N(n) = N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}\,3^{\beta+1}}\right) + D_p(n), \qquad (26)$$

et

$$D_p(n) = (\alpha+1)(\beta+1) - D_p\left(\frac{p}{n}\right) + \rho, \qquad (27)$$

calculer successivement $N_{23}(n)$. Le plus simple sera de choisir α et β de manière que 2^α et 3^β soient tous deux à peu près égaux à $n^{\frac{2}{3}}$; on aura dans ce cas

$$N(n) = (\alpha+1)(\beta+1) + N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right) + N\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right) - N\left(\frac{2^\alpha 3^\beta}{n}\right) + \rho, \qquad (28)$$

$\rho = 1$ quand n divise $2^\alpha 3^\beta$, en d'autres cas $\rho = 0$. Chacun des arguments à droite est alors presque égal à $n^{\frac{1}{3}}$.

Quand n est de la forme $n = 2^\alpha 3^\beta$, on a

$$N(2^\alpha 3^\beta) = N(2^\alpha) + N(3^\beta) + \alpha\beta - 1.$$

De là il suit qu'on a en général

$$N(2^\alpha 3^\beta) = 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 + N\left(\frac{2^\alpha}{3^{\beta+1}}\right) + N\left(\frac{3^\beta}{2^{\alpha+1}}\right), \qquad (25 \text{ p. } 12)$$

où au moins un des deux derniers termes à droite est nul. Quand 2^α et 3^β sont des puissances consécutives, ces deux termes disparaissent.

On parvient à la formule (25) en cherchant la correction qui doit être appliquée à $D_n(2^\alpha)$ ou à $D_n(3^\beta)$ pour obtenir $N_{23}(2^\alpha)$ ou $N_{23}(3^\beta)$; comme résultat secondaire, on trouve la formule (24'). L'équation identique $N(2^x) - N(2^{x-1}) = 1 + E\frac{x l 2}{l 3}$ et d'autres équations analogues fournissent un moyen simple pour calculer les N correspondant à des puissances de 2 et 3, comme le montre la petite table p. 13.

Pour les nombres contenant jusqu'à trois facteurs premiers différents, on trouve des résultats analogues; on peut toujours calculer la valeur exacte de $N_{2\,3\,5}(n)$, soit en ramenant le problème au cas précédent au moyen de l'équation

$$N_{2\,3\,5}(n) - N_{2\,3\,5}\left(\frac{n}{5}\right) = N_{2\,3}(n)\,,$$

soit par la formule générale (12), mais nous n'avons, dans aucun cas, obtenu directement la valeur exacte de $N_{2\,3\,5}$.

Nous ferons ensuite remarquer que l'équation fondamentale

$$F(n) - F\left(\frac{n}{2}\right) - F\left(\frac{n}{3}\right) + F\left(\frac{n}{6}\right) = 1\,,$$

qui peut servir à définir $N_{2\,3}(n)$, non seulement est satisfaite par cette fonction discontinue, mais aussi par une fonction continue de la forme

$$A(ln)^2 + B\,ln + C\,,$$

où $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{l2\,.\,l3}$, B et C sont des constantes arbitraires, et ln désigne le logarithme naturel de n. L'équation fondamentale de $N_{2\,3\,5}$ est également satisfaite par une fonction du 3ième degré en ln et ainsi de suite, ce qui est une conséquence des formules (11).

Cela conduit à une méthode particulière pour déterminer, au moyen de l'équation (11), les coefficients constants dans un développement de la forme

$$N_{2\,3\,5}(n) = A + B\,ln + C(ln)^2 + D(ln)^3\,,$$

en commençant par ceux des plus hautes puissances, et arriver ainsi à trouver une expression pour les valeurs moyennes. La limite de l'erreur commise est certainement en général du même ordre que $\frac{N(n)}{ln}$, mais vraisemblablement elle est beaucoup moindre. Il semble que la méthode qui est seulement indiquée ici mérite d'être étudiée plus à fond. L'expression à laquelle elle m'a conduit pour la valeur moyenne de $N_{a\,b}$ est donnée par la formule

$$N_{ab}(n) = \frac{1}{2}\,\frac{(ln)^2}{la\,lb} + \frac{1}{2}\,\frac{lab\,.\,ln}{la\,lb} + \frac{1}{12}\,\frac{(lab)^2 + la\,lb}{la\,lb}\,; \tag{34'}$$

la formule (35) contient l'expression correspondante de $N_{abc}(n)$ avec la modification que la dernière constante est encore indéterminée.

Pour $N_{2\,3}$ et $N_{2\,3\,5}$ j'ai fait une comparaison, qui semble très satisfaisante, des résultats numériques de la formule approximative et des valeurs vraies, en prenant pour n les premières puissances entières de e (voir p. 21).

III.

On peut appliquer à la fonction $L(n)$ des raisonnements tout à fait analogues à ceux qui précèdent. Au lieu de (12) on obtient ici l'identité

$$L(n)+(-1)^{\alpha}L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}}\right)+(-1)^{\beta}L\left(\frac{n}{3^{\beta+1}}\right)+\ldots+(-1)^{\alpha+\beta}L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}3^{\beta+1}}\right)\ldots+$$

$$+(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}L\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}\,3^{\beta+1}\,5^{\gamma+1}}\right)\ldots=\Lambda_p(n)\,,\quad (p=2^{\alpha}\,3^{\beta}5^{\gamma}\ldots) \tag{36}$$

qui pour $\alpha=\beta=\gamma=0$ se réduit à (37).

Comme toute autre fonction numérique, $L(n)$ peut être développée en série suivant $E\left(\frac{n}{x}\right)$. On obtient cette série au moyen de la série connue $\Sigma\mu_x E\frac{n}{x}=1$ $(x=1,2\ldots n)$. Elle se présente sous une forme qui, après quelques réductions, devient

$$L(n)=\sum_{y=1}^{y=n}\varepsilon_y\,.\,2^{\varkappa}E\frac{n}{y}\,, \qquad \text{(voir 39)}$$

$\varkappa$ désigne ici le nombre des facteurs premiers différents de p qui entrent dans y; $\varepsilon_y=-1, 0, +1$, et en décomposant chaque nombre entier y en facteurs dont l'un ξ seulement contient les nombres premiers 2, 3, 5... que nous avons pris comme bases, et l'autre facteur y est égal à $y:\xi$, on obtient

$$\varepsilon_y=\mu(\eta)\,\lambda(\xi).$$

On peut aussi exprimer L au moyen de N par la formule (40), dans laquelle d désigne les diviseurs de n.

Pour L_{23} on a l'équation fondamentale

$$L(n)+L\left(\frac{n}{2}\right)+L\left(\frac{n}{3}\right)+L\left(\frac{n}{6}\right)=1\,, \tag{43}$$

qui diffère de celle de N_{23} seulement par les signes des deux termes $L\left(\frac{n}{2}\right)$ et $L\left(\frac{n}{3}\right)$. Plus générale est la formule (44). De celle-ci il suit, quand 2^{α} et 3^{β} sont des puissances consécutives, que

$$L(2^{\alpha}\,3^{\beta})=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ pour } (\alpha+\beta) \text{ impair}\\ 1 \text{ pour } (\alpha+\beta) \text{ pair}\end{array}\right\}. \tag{46}$$

Pour d'autres valeurs de 2^{α} et 3^{β} on a en général

$$L(2^{\alpha}\,3^{\beta})=\frac{1+(-1)^{\alpha+\beta}}{2}-L\left(\frac{2^{\alpha}}{3^{\beta+1}}\right)-L\left(\frac{3^{\beta}}{2^{\alpha+1}}\right), \tag{47}$$

qui correspond à (25); on trouve une expression analogue pour $L(\sqrt{2^{\alpha}\,3^{\beta}})$.

On voit par là que, quelque grandes que soient les valeurs de n, il y en a toujours quelques-unes qui rendent $L(n)$ égal à zéro. Cette fonction ne peut donc croître à l'infini, mais oscille en réalité autour de zéro et on peut immédiatement indiquer les limites de ses oscillations au moyen des N correspondants. Soit $L(a)=0$ et $L(b)=0$, alors $L(n)$, pour $a<n<b$, ne peut différer de zéro que d'une quantité inférieure à $\frac{1}{2}(N(b)-N(a))$.

Au reste on peut toujours trouver $L(n)$ en appliquant la formule générale de réduction (36), et si n est de la forme $2^\alpha 3^\beta$, $L(n)$ pourra être exprimé par $L(2^\alpha)$ et $L(3^\beta)$. On trouvera p. 28 une petite table des valeurs de ces fonctions.

La recherche de $L_{235}(n)$ se fait de la même manière, mais je n'insisterai pas sur ce point. Pour qu'on puisse réussir en procédant par la voie ici indiquée, il sera d'abord nécessaire de discuter pour la fonction générale N le développement de sa valeur moyenne et les limites de ses déviations. Ces problèmes une fois résolus, les propriétés de $L(n)$ se trouveront sans difficulté.

Errata.

Page 8, Ligne 10, formule (12), au lieu de: $-N\left(\frac{n}{5^{\gamma+1}}\right) - N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}\,3^{\beta+1}}\right)$ lisez: $-N\left(\frac{n}{5^{\gamma+1}}\right) .. + N\left(\frac{n}{2^{\alpha+1}\,3^{\beta+1}}\right)$.

— 14, — 10 et 12, supprimer les numéros (25) et (25').

— 17, — 6, au lieu de: $-1.2.3.l2.l3.l5$, lisez: $1.2.3.l2.l3.l5$.

— 17, — 22, — — - : $1.2.3.la.lb.lc$, — : $D.1.2.3.la\ lb.lc$.